Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité non-linéaire

Résumé :

On présente le calcul du taux de restitution de l'énergie par la méthode thêta en 2D ou en 3D pour un problème thermo-élastique non-linéaire. La relation de comportement élastique non linéaire est décrite en [R5.03.20].

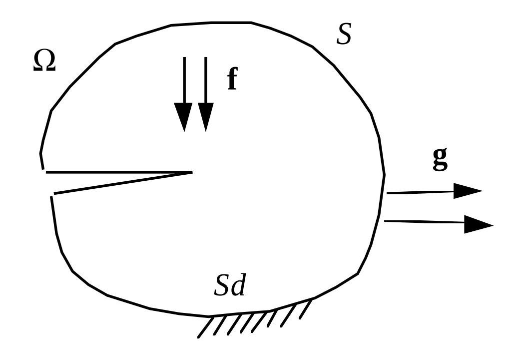
Table des Matières

1 Calcul du taux de restitution de l'énergie par la méthode théta en thermo-élasticité non linéaire

1.1 Relation de comportement

On considère un solide fissuré occupant le domaine Ω de l'espace R^2 ou R^3 . Soit :

u le champ de déplacement,
T le champ de température,
f le champ de forces volumiques appliquées sur Ω ,
g le champ de forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\partial\Omega$,
U le champ de déplacements imposés sur une partie S_d de $\partial\Omega$.



Le comportement du solide est supposé élastique non-linéaire tel que la relation de comportement coïncide avec la loi élastoplastique de Hencky-Von Mises (écrouissage isotrope) dans le cas d'un chargement qui induit une évolution radiale et monotone en tout point. Ce modèle est choisi dans les commandes `CALC_G` par l'intermédiaire du mot-clé `RELATION='ELAS_VMIS_LINE'` ou `'ELAS_VMIS_TRAC'` ou `'ELAS_VMIS_PUIS'` sous le mot-clé facteur `COMPORTEMENT` [R5.03.20].

On désigne par :

ε le tenseur de déformations,
$\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$ le tenseur des déformations initiales,
$\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes,
$\boldsymbol{\sigma}^\circ$ le tenseur des contraintes initiales,
$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^\circ,\boldsymbol{\sigma}^\circ,T)$ la densité d'énergie libre.

ε est relié au champ de déplacement u par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(u)=\frac{1}{2}(\mathbf{u}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}+\mathbf{u}_{\mathbf{j},\mathbf{i}})$$

La densité d'énergie libre $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^\circ,\boldsymbol{\sigma}^\circ,T)$ est une fonction convexe et différentiable, connue pour un état donné [R5.03.20 éq 3]. La relation de comportement du matériau s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}}=\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{ij}}}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^\circ,\boldsymbol{\sigma}^\circ,T)$$

Elle dérive du potentiel énergie libre. Pour cette relation de comportement hyperélastique, on sait donner un sens au taux de restitution d'énergie dans le cadre de l'approche globale en mécanique de la rupture. Ce n'est pas le cas pour une relation de comportement plastique.

1.2 Energie potentielle et relations d'équilibre

On définit les espaces des champs cinématiquement admissibles V et V_0.

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{v}\,\text{admissibles}, \mathbf{v}=\mathbf{U}\,\text{sur}\,S_d\} \\ V_0 &= \{\mathbf{v}\,\text{admissibles}, \mathbf{v}=\mathbf{O}\,\text{sur}\,S_d\} \end{aligned}$$

Avec les hypothèses du paragraphe [§1.1] (avec $\boldsymbol{\varepsilon}° = \boldsymbol{\sigma}° = 0$), les relations d'équilibre en formulation faible sont :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in V \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}} \mathbf{v}_{\mathbf{i,j}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{i}} \mathbf{v}_{\mathbf{i}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{g}_{\mathbf{i}} \mathbf{v}_{\mathbf{i}} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \end{cases}$$

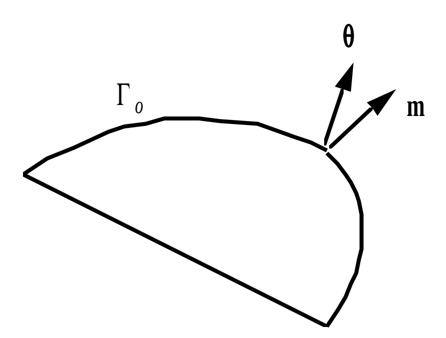
Elles sont obtenues en minimisant l'énergie potentielle globale du système :

$$\mathbf{W}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), T) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{i}} \mathbf{v}_{\mathbf{i}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{g}_{\mathbf{i}} \mathbf{v}_{\mathbf{i}} \, d\Gamma$$

La démonstration est identique à celle en élasticité linéaire [R7.02.01 §1.2].

1.3 Expression Lagrangienne du taux de restitution de l'énergie

Soit $\boldsymbol{m}$ la normale unitaire à Γ_0 située dans le plan tangent à $\partial\Omega$ dans Ω.



Soit le champ $\boldsymbol{\theta}$ tel que :

$$\boldsymbol{\theta} \in \Theta = \{\boldsymbol{\mu}\ \text{tels que}\ \boldsymbol{\mu} \,.\, \mathbf{n} = 0\ \text{sur}\ \Omega\}$$

en notant $\mathbf{n}$ la normale à $\partial\Omega$.

Le taux de restitution d'énergie G est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_o} G\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{m}\,\mathrm{dS}=G(\boldsymbol{\theta}),\ \forall\boldsymbol{\theta}\in\Theta$$

où $G(\boldsymbol{\theta})$ est défini par :

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{\theta}) &= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_{ij}\mathbf{u}_{i,p}\boldsymbol{\theta}_{p,j}-\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}_{k,k}-\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial T}\mathbf{T}_{,k}\boldsymbol{\theta}_k\,d\Omega\\ &+\int_\Omega\left(\boldsymbol{\sigma}_{ij}-\frac{1}{2}\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\right)\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij,k}\boldsymbol{\theta}_k-\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}-\boldsymbol{\varepsilon}^{th}_{ij}-\frac{1}{2}\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}\right)\boldsymbol{\sigma}_{ij,k}\boldsymbol{\theta}_k\,d\Omega\\ &+\int_\Omega \mathbf{f}_i\mathbf{u}_i\boldsymbol{\theta}_{k,k}+\mathbf{f}_{i,k}\boldsymbol{\theta}_k\mathbf{u}_i\,d\Omega\\ &+\int_S \mathbf{g}_{i,k}\boldsymbol{\theta}_k\mathbf{u}_i+\mathbf{g}_i\mathbf{u}_i\left(\boldsymbol{\theta}_{k,k}-\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\mathbf{n}_k}\mathbf{n}_k\right)d\Gamma\\ &-\int_{S_d}\boldsymbol{\sigma}_{ij}\mathbf{n}_j\mathbf{U}_{i,k}\boldsymbol{\theta}_k\,d\Gamma\end{aligned}$$

La démonstration est identique à celle du calcul de G en élasticité linéaire [R7.02.01]. L'expression est la même, le post-traitement est donc identique.

1.4 Implantation de G en thermo-élasticité non linéaire dans le *Code_Aster*

Les types d'éléments et de chargements, l'environnement nécessaire sont les mêmes que pour l'implantation de G en thermo-élasticité linéaire [R7.02.01 §2.4].

Pour le calcul des différents termes de $G(\boldsymbol{\theta})$, à un état donné, on récupère la densité d'énergie libre $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon},T)$, les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, calculées pour la relation de comportement non-linéaire (routine `NMELNL`).

On suppose que $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ=\boldsymbol{\sigma}^\circ=0$ (terme identique en thermo-élasticité linéaire ou non-linéaire). La densité d'énergie libre s'écrit alors [R5.03.20 §1.5] :

en thermo-élasticité linéaire :

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon},T)=\frac{1}{2}K\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}-3\alpha\left(T-T_{réf}\right)\right)^2+\frac{2\mu}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^2_{eq}$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2_{eq}=\frac{3}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{D}}_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{D}}_{ij}=\frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}\boldsymbol{\delta}_{ij}\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}\boldsymbol{\delta}_{ij}\right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2_{eq}=\frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^2_{kk}\right)$$

en thermo-élasticité non-linéaire $\left(2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}\geq\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}\right)$:

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon},T)=\frac{1}{2}K\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}-3\alpha\left(T-T_{réf}\right)\right)^2+\frac{1}{6\mu}\mathbf{R}\left(p\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}\right)\right)^2+\int_0^{p(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq})}R(s)\,ds$$

avec $\mathbf{R}\left(p\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}\right)\right)$: fonction d'écrouissage.

Pour un écrouissage isotrope linéaire (`RELATION= 'ELAS_VMIS_LINE'`) on a :

$$\mathbf{R}(p)=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}+p\frac{E\,E_T}{E-E_T}=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}+a\,p$$

$$p=\frac{\boldsymbol{\sigma}_{eq}-\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}}{3\mu+a}\quad \text{avec}\ a=\frac{E\,E_T}{E-E_T}$$

$$A(p)=\int_0^p \mathbf{R}(s)\,ds=\ \boldsymbol{\sigma}_{yp}+\frac{1}{2}a\,p^2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}\,p+\frac{p}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}+a\,p)$$

$$A(p)=\frac{p}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}+\mathbf{R}(p))$$

Le post-traitement est ensuite identique au problème en élasticité linéaire sauf pour le terme thermique :

$$\mathrm{THER}=-\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial T}\mathbf{T}_{,\mathbf{k}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}}$$

Si les coefficients de Lamé $\lambda(T)$ et $\mu(T)$ sont indépendants de la température, ce terme est nul. Dans le cas contraire, il faut calculer $\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial T}(\boldsymbol{\varepsilon},T)$ à un instant donné.

Pour un écrouissage isotrope linéaire, on a :

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial T}\quad(\boldsymbol{\varepsilon},T)=\left[\frac{1}{2}\frac{dK(T)}{dT}(\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}-3\alpha(T-T_{réf}))-3\mathrm{K}\left(\alpha+\frac{d\,\alpha(T)}{dT}(T-T_{réf})\right)\right](\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}-3\alpha T-T_{réf})$$
$$+\frac{R(p)}{6\mu^2}\left[2\mu\frac{dR(P)}{dT}-\frac{d\,\mu(T)}{dT}R(p)\right]+\frac{dA(p)}{dT}$$

avec

$$\frac{dR(p)}{dT}=\frac{d\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}(T)}{dT}+\frac{d\,a(T)}{dT}\,p+a\frac{d\,p(T)}{dT}$$

$$\frac{d\,a(T)}{dT}=\frac{1}{(E-E_T)^2}\left(\frac{d\,E_T(T)}{dT}E^2-\frac{d\,E(T)}{dT}E_T^2\right)$$

$$\frac{dp(T)}{dT}=\frac{1}{(3\mu+a)^2}\left[(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}-\boldsymbol{\sigma}_{eq})\left(3\frac{d\,\mu(T)}{dT}+\frac{dA(T)}{dT}\right)-(3\mu+a)\frac{d\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}(T)}{dT}\right]$$

$$\frac{\mathrm{dA}(p)}{dT}=\frac{1}{2}\frac{dp(T)}{dT}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}+R_p)+\frac{1}{2}p\left(\frac{d\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{y}}(T)}{dT}+\frac{\mathrm{d\,Rp}(T)}{dT}\right)$$

1.5 Mise en garde

Attention ! Par définition, dans le cas général :

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, T) \neq \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Bien qu'il soit possible d'effectuer un calcul élasto-plastique suivi du calcul de G en élasticité non linéaire, il faut bien savoir que cela n'a aucun sens thermo-dynamique et qu'il est normal que le résultat dépende du champ $\boldsymbol{\theta}$.

2 Calcul du taux de restitution de l'énergie par la méthode thêta en grandes transformations

On étend la relation de comportement du [§1] à de grands déplacements et de grandes rotations, dans la mesure où elle dérive d'un potentiel (loi hyperélastique). Cette fonctionnalité est déclenchée par le mot-clé `DEFORMATION='GROT_GDEP'` dans la commande `CALC_G`.

2.1 Relation de comportement

On désigne par :

$\mathbf{E}$ le tenseur de déformations de Green-Lagrange,
$\mathbf{S}$ le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange appelé encore deuxième tenseur de Piola-Kirchoff,
$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{E})$ la densité d'énergie interne.

Le comportement du solide est supposé hyperélastique, à savoir que :

$\mathbf{E}$ est relié au champ de déplacement $\mathbf{u}$ mesuré par rapport à la configuration de référence Ω_0 par :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{ij}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} + \mathbf{u}_{\mathbf{j},\mathbf{i}} + \mathbf{u}_{\mathbf{k},\mathbf{i}}\mathbf{u}_{\mathbf{k},\mathbf{j}})$$

$\mathbf{S}$ est relié au tenseur des contraintes de cauchy T par :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{ij}} = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}_{\mathbf{ik}}^{\mathbf{-1}}\mathbf{T}_{\mathbf{kl}}\mathbf{F}_{\mathbf{jl}}^{\mathbf{-1}}$$

$\mathbf{F}$ étant le gradient de la transformation qui fait passer de la configuration de référence Ω_0 à la configuration actuelle Ω , relié au déplacement par :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{ij}} = (\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{ij}} + \mathbf{u}_{\mathbf{i},\mathbf{j}})$$

La relation de comportement d'un matériau hyperélastique s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{S_{ij}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{E_{ij}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{E_{jj}}} = \mathbf{S_{ji}}$$

Cette relation décrit un comportement élastique non-linéaire, analogue à celle du [§1.1]. Elle offre la possibilité de traiter les problèmes de mécanique de la rupture sans y intégrer la plasticité. Et dans le cas d'un chargement radial monotone, elle permet d'obtenir des déformations et des contraintes de la structure semblables à celles que l'on obtiendrait si le matériau présentait un écrouissage isotrope. Le matériau hyperélastique a un comportement mécanique réversible, c'est-à-dire que tout cycle de chargement n'engendre aucune dissipation.

Ce modèle est choisi dans la commande `CALC_G` [U4.82.03] par l'intermédiaire du mot-clé :

`RELATION : 'ELAS'`
pour une relation élastique "linéaire", c'est-à-dire que la relation entre les déformations et les contraintes considérées est linéaire,

`RELATION : 'ELAS_VMIS_LINE'` ou `'ELAS_VMIS_TRAC'` ou `'ELAS_VMIS_PUIS'`
pour une relation de comportement élastique "non linéaire" (loi de HENCKY-VON MISES à écrouissage isotrope).

Une telle relation de comportement permet en toute rigueur de prendre en compte de grandes déformations et de grandes rotations. Toutefois, on se cantonne à de petites déformations pour assurer l'existence d'une solution et pour être identique à un comportement élastoplastique sous un chargement radial monotone [R5.03.20 §2.1].

2.2 Energie potentielle et relations d'équilibre

Le chargement considéré se réduit à une densité surfacique non suiveuse $\mathbf{R}$ appliquée sur une partie Γ_0 du bord de Ω_0 (hypothèse des charges mortes [R5.03.20 §2.2]).

On définit un espace des champs cinématiquement admissible V :

$$\mathrm{V} = \{\, \mathbf{v}\,\text{admissibles}, \mathbf{v} = 0 \,\text{sur}\, \Gamma_0 \}$$

Les relations d'équilibre en formulation faible sont :

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{F_{ik}} \mathbf{S_{kj}} \mathbf{v_{i,j}} \, d\,\Omega_0 = \int_{\Gamma} \mathbf{R_i} \mathbf{v_i} \, d\,\Gamma$$

Elles peuvent être obtenues en minimisant l'énergie potentielle globale du système :

$$W(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{E}(\mathbf{v}))\, d\,\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{R_i} \mathbf{v_i} \, d\,\Gamma$$

En effet, si cette fonctionnelle est minimale pour le champ de déplacement $\mathbf{u}$, alors :

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{E_{ij}}} \delta \mathbf{E_{ij}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{R_i} \delta \mathbf{v_i} d\Gamma \quad = 0, \qquad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathrm{V} \\
&= \int_{\Omega_0} \mathbf{S_{ij}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\delta \mathbf{v_{i,j}} + \delta \mathbf{v_{j,i}} + \delta \mathbf{v_{p,i}} \mathbf{u_{p,j}} + \mathbf{u_{p,i}} \delta \mathbf{v_{p,j}}) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{R_i} \delta \mathbf{v_i} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega_0} \mathbf{S_{ij}} (\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{ip}} + \mathbf{u_{p,i}}) \delta \mathbf{v_{p,i}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{R_i} \delta \mathbf{v_i} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega_0} \mathbf{F_{pi}} \mathbf{S_{ij}} \delta \mathbf{v_{p,j}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{R_i} \delta \mathbf{v_i} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega_0} \mathbf{F_{ik}} \mathbf{S_{kj}} \delta \mathbf{v_{i,j}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{R_i} \delta \mathbf{v_i} d\Gamma \quad = 0
\end{aligned}$$

Nous retrouvons donc les équations d'équilibre et la relation de comportement en ayant posé :

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{E}_{ij}}$$

2.3 Expression Lagrangienne du taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité non-linéaire et en grandes transformations

Par définition, le taux de restitution d'énergie G est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle à l'équilibre par rapport au domaine Ω [bib1]. Il est calculé par la méthode thêta, qui est une méthode lagrangienne de dérivation de l'énergie potentielle [bib4] et [bib2]. On considère des transformations $F^{\eta}: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} + \eta \boldsymbol{\theta}(\mathbf{M})$ du domaine en Ω_0 un domaine Ω_η qui correspondent à des propagations de la fissure. A ces familles de configuration de référence ainsi définies Ω_η correspondent des familles de configurations déformées où la fissure s'est propagée. Le taux de restitution de l'énergie G est alors l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle $W(\mathbf{u}(\eta))$ à l'équilibre par rapport à l'évolution initiale du fond de fissure : η

$$G = -\left(\frac{\mathrm{d}\, W(\mathbf{u}(\eta))}{\mathrm{d}\eta} \right)_{\eta=0}$$

On note comme dans [bib 4] par . la dérivation lagrangienne dans une propagation virtuelle de fissure de vitesse $\boldsymbol{\theta}$. Soit $\boldsymbol{\varphi}(\eta, \mathbf{M})$ un champ quelconque (η réel positif et $\mathbf{M}$ appartenant au domaine Ω_0), nous noterons :

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\eta, \mathbf{M}) = \bar{\boldsymbol{\varphi}}(\eta, F^{\eta} \mathbf{M}) \,\mathrm{et}\, \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$$

L'énergie potentielle définie sur Ω_η est ramenée sur Ω_0, $\mathbf{R}$ est supposé indépendant de η, la dérivation par rapport au paramètre de propagation η est alors aisée et le taux de restitution de l'énergie dans cette propagation est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_o} G\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{m}\,\mathrm{dS}=G(\boldsymbol{\theta}) \qquad ,\forall\boldsymbol{\theta}\in\Theta$$

avec :

$$-G(\boldsymbol{\theta})=\int_{\Omega_o}\dot{\overbrace{(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{E},T))}}+\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{E},T)\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k,k}}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma}\mathbf{R_i}\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}+\mathbf{R_{i,k}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}}\mathbf{u_i}+\mathbf{R_i}\mathbf{u_i}\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k,k}}-\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\mathbf{n_k}}\mathbf{n_k}\right)\mathrm{d}\Gamma$$

Or :

$$\dot{\overbrace{(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{E},T))}}=\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\mathbf{E}_{ij}}\dot{\mathbf{E}}_{ij}+\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial T}\dot{T}$$

Par la suite, nous ne considérerons que le terme $\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\mathbf{E}_{ij}}\dot{\mathbf{E}}_{ij}$, le terme thermique étant traité de la même façon qu'en petits déplacement [R7.02.01].

Et d'après la proposition 2 de [bib4] :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_{ij}=&\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i,j}}+\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{j,i}}+\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{k,i}}\mathbf{u}_{\mathbf{k,j}}+\mathbf{u}_{\mathbf{k,i}}\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{k,j}}\right)\\&-\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{i,p}}\mathbf{q}_{\mathbf{p,j}}+\mathbf{u}_{\mathbf{j,p}}\mathbf{q}_{\mathbf{p,i}}+\mathbf{u}_{\mathbf{k,p}}\mathbf{q}_{\mathbf{p,i}}\mathbf{u}_{\mathbf{k,j}}+\mathbf{u}_{\mathbf{k,i}}\mathbf{u}_{\mathbf{k,p}}\mathbf{q}_{\mathbf{p,j}}\right)\end{aligned}$$

On peut éliminer $\dot{\mathbf{u}}$ de l'expression de G comme en petites déformations en remarquant que $\dot{u}$ est cinématiquement admissible (cf. [bib3] pour les problèmes de régularité) et en utilisant l'équation d'équilibre :

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_o}\dot{\overbrace{(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{E}))}}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma}\mathbf{R_i}\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}\mathrm{d}\Gamma=\\&\int_{\Omega_o}\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\mathbf{E}_{ij}}\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{u}}_{i,j}+\dot{\mathbf{u}}_{j,i}+\dot{\mathbf{u}}_{k,i}\mathbf{u}_{\mathbf{k,j}}+\mathbf{u}_{\mathbf{k,i}}\dot{\mathbf{u}}_{k,j}\right)d\Omega\\&-\int_{\Gamma}\mathbf{R_i}\dot{\mathbf{u}}_i\,d\Gamma-\int_{\Omega_o}\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\mathbf{E}_{ij}}\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{i,p}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{p,j}}+\mathbf{u}_{\mathbf{j,p}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{p,i}}+\mathbf{u}_{\mathbf{k,p}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{p,i}}\mathbf{u}_{\mathbf{k,j}}+\mathbf{u}_{\mathbf{k,i}}\mathbf{u}_{\mathbf{k,p}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{p,j}}\right)d\Omega\\&=-\int_{\Omega_o}\mathbf{S}_{ij}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{i,p}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{p,j}}+\mathbf{u}_{\mathbf{k,i}}\mathbf{u}_{\mathbf{k,p}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{p,j}}\right)d\Omega\\&=-\int_{\Omega_o}\mathbf{S}_{ij}\left(\mathbf{d}_{ki}+\mathbf{u}_{\mathbf{k,i}}\right)\mathbf{u}_{\mathbf{k,p}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{p,j}}d\Omega\\&=-\int_{\Omega_o}\mathbf{S}_{ij}\mathbf{F}_{ki}\mathbf{u}_{\mathbf{k,p}}\mathbf{q}_{\mathbf{p,j}}d\Omega\\&=-\int_{\Omega_o}\mathbf{F}_{ik}\mathbf{S}_{kj}\mathbf{u}_{\mathbf{i,p}}\mathbf{q}_{\mathbf{p,j}}d\Omega\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$G(\boldsymbol{\theta})=\int_{\Omega_0}\mathbf{F}_{\mathbf{ik}}\mathbf{S}_{\mathbf{kj}}(\mathbf{u}_{\mathbf{i},\mathbf{p}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{p},\mathbf{j}})-\Psi(\mathbf{E})\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\mathbf{R}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}}\mathbf{u}_{\mathbf{i}}+\mathbf{R}_{\mathbf{i}}\mathbf{u}_{\mathbf{i}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}-\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\mathbf{n}_{\mathbf{k}}}\mathbf{n}_{\mathbf{k}})\,\mathrm{d}\Gamma$$

L'expression complète pour les chargements suivants :

densité surfacique non suiveuse $\mathbf{R}$ appliquée sur une partie Γ du bord de Ω_0 ,
densité volumique non suiveuse $\mathbf{f}$ appliquée sur le domaine Ω ,

et en tenant compte de la thermique :

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{\theta})=&\int_{\Omega_0}\mathbf{F}_{\mathbf{ik}}\mathbf{S}_{\mathbf{kj}}(\mathbf{u}_{\mathbf{i},\mathbf{p}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{p},\mathbf{j}})-\Psi(\mathbf{E})\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}-\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{T}}\mathbf{T}_{,\mathbf{k}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}\Omega\\&+\int_{\Omega_0}\mathbf{f}_{\mathbf{i}}\mathbf{u}_{\mathbf{i}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}+\mathbf{f}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}}\mathbf{u}_{\mathbf{i}}\,\mathrm{d}\Omega\\&+\int_{\Gamma}\mathbf{R}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}}\mathbf{u}_{\mathbf{i}}+\mathbf{R}_{\mathbf{i}}\mathbf{u}_{\mathbf{i}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}-\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\mathbf{n}_{\mathbf{k}}}\mathbf{n}_{\mathbf{k}})\,\mathrm{d}\Gamma\end{aligned}$$

2.4 Implantation dans le *Code_Aster*

La comparaison des formules de $G(\boldsymbol{\theta})$ du [§1.3] et du [§1.4] montre que les termes de $G(\boldsymbol{\theta})$ sont très proches. L'introduction des grandes transformations nécessite peu de modification en post-traitement.

La présence du mot-clé DEFORMATION='GROT_GDEP' sous le mot-clé facteur COMPORTEMENT de la commande CALC_G indique qu'il est nécessaire de récupérer le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange S et le gradient de la transformation F (routines NMGEOM et NMELNL).

Les types d'éléments finis sont les mêmes qu'en élasticité linéaire [R7.02.01 §2.4]. Ce sont les éléments isoparamétriques 2D et 3D.

Les chargements supportés sont ceux supportés en élasticité linéaire à condition que ce soient des charges mortes : typiquement une force imposée est une charge morte tandis que la pression est un chargement suiveur puisqu'il dépend de l'orientation de la surface, donc de la transformation.

2.5 Restriction

Avec la relation de comportement précisée au §2, on a une formulation de G valable pour de grandes déformations pour des matériaux hyper-élastiques, mais... si l'on souhaite une cohérence avec le matériau réel qui, rappelons-le, est élasto-plastique, il est impératif de se cantonner à des déformations petites, les déplacements et les rotations pouvant être grandes.

Les conditions de chargements proportionnels et monotones, indispensables pour assurer la cohérence du modèle avec le matériau réel, conduisent à des restrictions importantes du champ des problèmes à même d'être traités par cette méthode (le thermique en particulier peut conduire à des décharges locales). Il ne peut donc s'agir que d'une solution palliative avant d'être en mesure de donner un sens au taux de restitution d'énergie dans le cadre de comportements plastiques.

3 Bibliographie

1) BUI H.D., Mécanique de la rupture fragile, Masson, 1977.

2) DESTUYNDER Ph., DJAOUA M., Sur une interprétation de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile, Mathematics Methods in the Applied Sciences, Vol. 3, pp. 70-87, 1981.

3) GRISVARD P., "Problèmes aux limites dans les polygones", Mode d'emploi - EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, 1, 1986 pp. 21-59.

4) MIALON P. , "Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode théta", EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, n∞3, 1988, pp. 1-28.

5) MIALON P., Etude du taux de restitution de l'énergie dans une direction marquant un angle avec une fissure, note interne EDF, HI/4740-07, 1984.

6) SIDOROFF F., Cours sur les grandes déformations, Ecole d'été, Sophia-Antipolis, 8 au 10 septembre 1982.

7) LORENTZ E., Une relation de comportement hyperélastique non linéaire, Note interne EDF DER HI-74/95/011/0, 1995.

4 Description des versions du document

Version Aster	**Auteur(s) Organisme(s)**	**Description des modifications**
4	E.VISSE EDF-R&D/MMN	Texte initial
10,1,1	J.M.Proix, R.Bargellini EDF/R&D/AMA	Changement du mot-clé GREEN en GROT_GDEP